Πρόταση: Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και (a_{k_n}) μια υπακολουθία της.

α) Αν $a_n \to x$, $x \in \mathbb{R}$, τότε $a_{k_n} \to x$.

β) Αν $a_n \to +\infty$, τότε $a_{k_n} \to +\infty$.

γ) Αν $a_n \to -\infty$, τότε $a_{k_n} \to -\infty$.

Απόδειξη:

α) Έστω $\varepsilon > 0$.

Εφόσον $a_n \to x$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - x| < \varepsilon$

Τότε, $\forall n \geq n_0$ $k_n \geq n \geq n_0$ άρα $|a_{k_n} - x| < \varepsilon$.

Επομένως, η $a_{k_n} \to x$.

β), γ) ομοίως.

Παρατήρηση: Αν για μια ακολουθία (a_n) βρούμε δύο υπακολουθίες της (a_{k_n}) και (a_{λ_n}) ώστε $a_{k_n} \to x$ και $a_{\lambda_n} \to y$ όπου $x \neq y$ ($x, y \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$)

Τότε η (a_n) δεν έχει όριο.

Παράδειγμα: Η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ δεν έχει όριο.

$$\left.\begin{aligned} a_{2n} &= (-1)^{2n} = 1 \to 1 \\ a_{2n-1} &= (-1)^{2n-1} = -1 \to -1 \end{aligned}\right\} \text{Άρα, η } a_n \text{ δεν έχει όριο.}$$

Πρόταση: Κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει μονότονη υπακολουθία

Απόδειξη:

Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών.

Λέμε ότι η (a_n) έχει σημείο κορυφής στο k αν ισχύει $a_k \geq a_m$ $\forall m \geq k$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Η (a_n) να έχει άπειρα σημεία κορυφής

Έστω $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ όλα τα σημεία κορυφής.

Τότε, $a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq a_{k_3} \geq \dots$ και η (a_{k_n}) είναι φθίνουσα.

(ii) Η (a_n) να έχει πεπερασμένο το πλήθος σημεία κορυφής.

Έστω $k_1 \in \mathbb{N}$ και μεγαλύτερος από το τελευταίο σημείο κορυφής.
ή $k_1 = 1$ αν η (a_n) δεν έχει κανένα σημείο κορυφής.
Τότε, υπάρχει $k_2 > k_1$, εφόσον το k_2 δεν είναι σημείο κορυφής, ώστε $a_{k_2} > a_{k_1}$.
Εφόσον το k_2 δεν είναι σημείο κορυφής, υπάρχει $k_3 > k_2$, ώστε $a_{k_3} > a_{k_2}$
και συνεχίζουμε με επαγωγή.
Έτσι, κατασκευάζουμε φυσικούς $k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$
ώστε $a_{k_1} < a_{k_2} < a_{k_3} < \dots < a_{k_n} < a_{k_{n+1}} < \dots$ και η (a_{k_n}) είναι (γνησίως) αύξουσα.

Θεώρημα Bolzano-Weierstrass:

Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη:
Έστω (a_n) μια φραγμένη ακολουθία.
Τότε, η (a_n) έχει μια μονότονη υπακολουθία (a_{k_n})
Η (a_{k_n}) είναι μονότονη και φραγμένη, άρα συγκλίνουσα.

Βασικές Ακολουθίες ή Ακολουθίες Cauchy

Ορισμός: Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_n) λέγεται βασική ακολουθία ή ακολουθία Cauchy αν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|a_n - a_m| < \varepsilon, \forall n, m \geq n_0$.

[Συμβολισμός $\lim\limits_{n,m \to +\infty} |a_n - a_m| = 0$] Δε θα τον χρησιμοποιεί.

Πρόταση: Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι βασική.

Απόδειξη:
Έστω (a_n) μια συγκλίνουσα ακολουθία. $a_n \to x$ $(x \in \mathbb{R})$
Έστω $\varepsilon > 0$
Εφόσον $a_n \to x$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_0$.

$\forall n, m \geq n_0$ $|a_n - a_m| = |a_n - x + x - a_m| \leq |a_n - x| + |a_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Άρα, η (a_n) είναι βασική.

Πρόταση: Κάθε βασική ακολουθία είναι φραγμένη.

Απόδειξη:

Έστω (a_n) μια βασική ακολουθία.

Από τον ορισμό, για $\varepsilon=1$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n-a_m|<1$ $\forall n,m \geq n_0$.

Έτσι, για $n \geq n_0$ $|a_n| \leq |a_n-a_{n_0}|+|a_{n_0}| < 1+|a_{n_0}|$

Έτσι, $M=\max\{|a_1|,|a_2|,\dots,|a_{n_0-1}|,|a_n|\}$ και έχουμε $|a_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Άρα, η (a_n) είναι φραγμένη.

Πρόταση: Αν (a_n) είναι μια βασική ακολουθία και έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία τότε και η (a_n) είναι συγκλίνουσα.

Απόδειξη:

Έστω (a_{k_n}) μια υπακολουθία της (a_n) και $x \in \mathbb{R}$ ώστε $a_{k_n} \to x$.

Θα αποδείξουμε πως η $a_n \to x$.

Έστω $\varepsilon>0$

Εφόσον η (a_n) είναι βασική $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n,m \geq n_1$ να ισχύει: $|a_n-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}$

Εφόσον $a_{k_n} \to x$ $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_2$ να ισχύει $|a_{k_n}-x|<\frac{\varepsilon}{2}$

Θέτουμε $n_0=\max\{n_1,n_2\}$

$\forall n \geq n_0$ $\quad |a_n-x| \leq |a_n-a_{k_n}|+|a_{k_n}-x| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

Επομένως, $a_n \to x$.

Θεώρημα: Κάθε βασική ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι συγκλίνουσα.

Απόδειξη:

Έστω (a_n) μια βασική ακολουθία.

Τότε, η (a_n) είναι φραγμένη. Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass η (a_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από την προηγούμενη πρόταση.

Παράδειγμα: $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$

Παρατηρούμε ότι $a_{n+1}=1+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=a_n+\frac{1}{n+1}>a_n$

$$a_{2n}-a_n=\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n} \geq n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Έτσι, η (a_n) δεν είναι βασική, άρα δεν είναι συγκλίνουσα.

Η (a_n) είναι αύξουσα και όχι άνω φραγμένη, άρα $a_n \to +\infty$